

p -АДИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТВЕРДЫХ СФЕР С ТРЕМЯ СОСТОЯНИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

О. Н. ХАКИМОВ

Аннотация. В этой работе мы изучим p -адическую модель (твердых сфер) ТС с тремя состояниями на дереве Кэли. При $k = 2$ изучим трансляционно-инвариантные и периодические p -адические меры Гиббса для модели ТС. Покажем, что при $p \neq 2$ любая p -адическая мера Гиббса является ограниченной. В частности, будут показаны не существование сильного фазового перехода для модели ТС на дереве Кэли порядка k .

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, мера Гиббса, модель ТС, трансляционно-инвариантная мера, p -адические числа.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФАКТЫ

В работе [13], [17] были изучены вещественные гиббсовские меры для модели ТС с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 1$. В этой работе мы изучим p -адический аналог этой модели.

Известно, что p -адические модели в физике не могут быть описаны, используя обычную теорию вероятностей [10, 12, 19]. В [10] абстрактная p -адическая теория вероятностей была развита посредством теории неархимедовых мер [15]. Вероятностные процессы на поле p -адических чисел были изучены многими авторами (см. [1–3, 16]). Не-архимедовый аналог теоремы Колмогорова был доказан в [7].

Описание предельных мер Гиббса для данного гамильтониана является одним из основных задач в теории гиббсовских мер. Полный анализ множества таких мер довольно трудоемкий. По этой причине большая часть работ по этой тематике посвящена изучению гиббсовских мер на дереве Кэли [4, 5, 8, 13, 14].

В работе [9] был изучен p -адическая модель ТС с тремя состояниями на дереве Кэли порядка k . Был доказан, что если $k^2 - 4 \not\equiv 0 \pmod{p}$, то существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса для модели ТС. В данной работе мы исследуем случай $k^2 - 4 \equiv 0 \pmod{p}$. В этом случае будет показана не единственность p -адических мер Гиббса для модели ТС. Также, исследуем проблему ограниченности p -адических мер Гиббса при любом k .

1.1. p -адические числа и меры. Каждое рациональное число $x \neq 0$ может быть представлено в виде $x = p^r \frac{n}{m}$, где $r, n \in \mathbb{Z}$, m — положительное число,

$(n, m) = 1$, причем m и n не делятся на p и p – фиксированное простое число. p -Адитическая норма $|x|_p$ определяется по формуле

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Эта норма удовлетворяет сильному неравенству треугольника:

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Это свойство показывает неархимедовость нормы.

Из этого свойства непосредственно следуют следующие (свойства p -адической нормы):

- 1) если $|x|_p \neq |y|_p$, то $|x - y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$;
- 2) если $|x|_p = |y|_p$, то $|x - y|_p \leq |x|_p$;

Пополнение поля рациональных чисел \mathbb{Q} по p -адической норме приводит к полю p -адических чисел \mathbb{Q}_p для каждого простого p [11].

Начиная с поля рациональных чисел \mathbb{Q} , мы можем получить либо поле вещественных чисел \mathbb{R} , либо одно из полей p -адических чисел \mathbb{Q}_p (теорема Островского).

Каждое p -адическое число $x \neq 0$ имеет единственное каноническое разложение

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots), \quad (1.1)$$

где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и x_j целые числа, $0 \leq x_j \leq p - 1$, $x_0 > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$ (см [11, 18, 19]). В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

Теорема 1. [19] Уравнение $x^2 = a$, $0 \neq a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1p + \dots)$, $0 \leq a_j \leq p - 1$, $a_0 > 0$ имеет решение $x \in \mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее:

- 1) $\gamma(a)$ четное;
- 2) $y^2 \equiv a_0 \pmod{p}$ разрешимо, если $p \neq 2$; $a_1 = a_2 = 0$, если $p = 2$.

Множество $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ называется множеством целых p -адических чисел. $\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ – множество p -адических единиц.

Следующая теорема известна как лемма Гензеля.

Теорема 2. [11] Пусть $F(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ – многочлен с целыми p -адическими коэффициентами, а $F'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1}$ – его производная. Предположим, что a_0 – целое p -адическое число, для которого $F(a_0) \equiv 0 \pmod{p}$ и $F'(a_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда существует единственное целое p -адическое число a , такое, что

$$F(a) = 0 \text{ и } a \equiv a_0 \pmod{p}.$$

Для $a \in \mathbb{Q}_p$ и $r > 0$ обозначим

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}.$$

p -адический логарифм определяется как ряд

$$\log_p(x) = \log_p(1 + (x - 1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x - 1)^n}{n},$$

который сходится для $x \in B(1, 1)$; p -адическая экспонента определяется как

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

которая сходится для $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$.

Лемма 1. Пусть $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$. Тогда

$$|\exp_p(x)|_p = 1, \quad |\exp_p(x) - 1|_p = |x|_p, \quad |\log_p(1 + x)|_p = |x|_p,$$

$$\log_p(\exp_p(x)) = x, \quad \exp_p(\log_p(1 + x)) = 1 + x.$$

Более подробно об основах p -адического анализа и p -адической математической физики можно найти в [11, 18, 19].

Пусть (X, \mathcal{B}) измеримое пространство, где \mathcal{B} алгебра подмножеств в X . Функция $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ называется p -адической мерой, если для любого набора $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ такого, что $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ имеет место

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

p -Адическая мера μ называется вероятностной, если $\mu(X) = 1$ (см. [7]). p -Адическая мера μ называется *ограниченной*, если $\left\{|\mu(A)|_p : A \in \mathcal{B}\right\} < \infty$ (см. [10]).

1.2. Дерево Кэли. Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево (граф без циклов), из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер, V — множество вершин и L — множество ребер. Две вершины x и y называются *ближайшими соседями*, если существует ребро $l \in L$ соединяющее их и пишется как $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$ — число ребер кратчайшей пути, соединяющей x и y .

Пусть $x^0 \in V$ фиксированная точка. Введем обозначения:

$$W_n = \{x \in V : d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=1}^n W_m,$$

и

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, \quad x \in W_n.$$

1.3. модель ТС. Мы рассмотрим модель ТС с тремя состояниями на деревьях Кэли. В этой модели каждой вершине $x \in V$ ставится в соответствие одно из значений $\sigma(x) \in \{0, 1, 2\}$. Значения $\sigma(x) \in \{1, 2\}$ означают, что вершина $x \in V$ "занята" и $\sigma(x) = 0$ означает, что вершина $x \in V$ "вакантна". Конфигурация $\sigma = \{\sigma(x), x \in V\}$ на дереве Кэли есть функция из V в $\{0, 1, 2\}$. Конфигурации в V_n и W_n определяются аналогично.

Конфигурация σ называется допустимой на дереве Кэли, если $\sigma(x) + \sigma(y) \notin \{0, 3\}$ для любой пары ближайших соседей x и y в V . Обозначим через Ω множество всех допустимых конфигураций на дереве Кэли.

Для фиксированной $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Q}_p^3$ определим p -адический гамильтониан модели ТС

$$H_\lambda(\sigma) = \sum_{x \in V} \log_p \lambda_{\sigma(x)}, \quad \sigma \in \Omega. \quad (1.2)$$

2. ПОСТРОЕНИЕ p -АДИЧЕСКОЙ МЕРЫ ГИББСА.

Мы построим p -адическую меру Гиббса для модели (1.2). Так как в определении p -адической меры Гиббса используется $\exp_p(x)$, то все ниже следующие величины должны принадлежать множеству

$$\mathcal{E}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1, |x - 1|_p < p^{-1/(p-1)}\}.$$

Как и в классическом случае, мы рассмотрим специальный класс меры Гиббса.

Для $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ определим $\#\sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$ (т.е., $\#\sigma_n$ число занятых вершин в σ_n).

Пусть $z : x \rightarrow z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}) \in \mathcal{E}_p^3$ векторнозначная функция на V . Рассмотрим случай, когда $\lambda_0 = 1$, и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Для $\lambda \in \mathcal{E}_p$ рассмотрим p -адическое вероятностное распределение $\mu_z^{(n)}$ на Ω_{V_n} , которое определяется как

$$\mu_z^{(n)}(\sigma_n) = Z_{z,n}^{-1} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma_n(x), x}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

где $Z_{z,n}$ нормирующая константа

$$Z_{z,n} = \sum_{\omega_n \in \Omega_{V_n}} \lambda^{\#\omega_n} \prod_{x \in W_n} z_{\omega_n(x), x}. \quad (2.2)$$

Говорят, что p -адическое вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ согласовано, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$,

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu_z^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_z^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (2.3)$$

В этом случае по теореме Колмогорова [7] существует единственная мера μ_z на Ω такая, что $\mu_z(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_z^{(n)}(\sigma_n)$ для всех n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

Определение 1. Мера $\mu_z^{(n)}$, определенная как (2.1) удовлетворяющая (2.3) называется p -адической мерой Гиббса для модели (1.2), соответствующей функции $z : x \in V \setminus \{x^0\} \rightarrow z_x$.

Если существуют две p -адические меры Гиббса μ_z и μ_t такие, что только одна из них является ограниченной, то говорят, что существует *фазовый переход*. Более того, если существует последовательность множеств $\{A_n\}$ такая, что $A_n \in \Omega_{V_n}$ и $|\mu_z(A_n)|_p \rightarrow 0$, $|\mu_t(A_n)|_p \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то говорят, что существует *сильный фазовый переход*. Если существуют две ограниченные p -адические меры Гиббса, то говорят, что существует *квази фазовый переход* [14].

Следующая теорема дает условие на z_x , гарантирующее согласованность распределения $\mu_z^{(n)}$.

Теорема 3. [9] Вероятностное распределение $\mu_z^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, заданное формулой (2.1), согласованно тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$z'_{i,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{1 + z'_{i,y}}{z'_{1,y} + z'_{2,y}}, \quad i = 1, 2 \quad (2.4)$$

где $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x} / z_{0,x} \in \mathcal{E}_p$, $i = 1, 2$.

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНАЯ МЕРА ГИББСА

Решение вида $z_x = (z_1, z_2) \in \mathcal{E}_p^2$, $x \neq x_0$ системы уравнений (2.4) называется *трансляционно-инвариантным*. Соответствующая p -адическая мера Гиббса трансляционно-инвариантного решения системы уравнений (2.4) называется *трансляционно-инвариантной мерой Гиббса*.

Для того, чтобы найти трансляционно-инвариантные p -адические меры Гиббса для модели ТС, рассмотрим следующие уравнения

$$z_i = \lambda \left(\frac{1 + z_i}{z_1 + z_2} \right)^k, \quad i = 1, 2. \quad (3.1)$$

Теорема 4. [9] 1) Пусть $p = 2$. Если k делится на 4, то для модели (1.2) существует единственная трансляционно-инвариантная 2-адическая мера Гиббса. 2) Пусть $p \neq 2$. Если $k^2 - 4$ не делится на p , то для модели (1.2) существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса.

Замечание 1. Условия Теоремы 4 не являются необходимыми для единственности трансляционно-инвариантных p -адических мер Гиббса [9]. Возникает естественный вопрос: существует ли фазовый переход для модели (1.2) на дереве Кэли порядка k . Очевидно, что при $k = 2$ условие Теоремы 4 не выполняется для любого простого числа p . В работе [9] были показаны, что при $k = 2$ и $p = 3$ существуют три трансляционно-инвариантные p -адические меры Гиббса.

В этой работе мы исследуем трансляционно-инвариантные p -адические меры Гиббса для модели (1.2) на дереве Кэли порядка два.

Утверждение 1. Пусть $k = 2$ и $p > 3$. Тогда система уравнений (3.1) имеет единственное решение на инвариантном множестве $\{z \in \mathcal{E}_p^2 : z_1 = z_2\}$.

Доказательство. Пусть $z_i = t$, $i = 1, 2$. Тогда из (3.1) получим

$$4t^3 - \lambda(t+1)^2 = 0.$$

Функция $f(t) = 4t^3 - \lambda(t+1)^2$ является многочленом с целыми p -адическими коэффициентами. Учитывая $\lambda \in \mathcal{E}_p$ и $p > 3$ из $f(1) = 4(1 - \lambda)$ и $f'(1) = 8 + 4(1 - \lambda)$ имеем $f(1) \equiv 0 \pmod{p}$ и $f(1) \not\equiv 0 \pmod{p}$. В силу леммы Гензеля существует единственное число $t^* \in \mathcal{E}_p$ такое, что $f(t^*) = 0$. Это означает, что функциональное уравнение (3.1) имеет единственное решение $z^* = (t^*, t^*)$ на множестве $\{z \in \mathcal{E}_p^2 : z_1 = z_2\}$ \square

Обозначим $M_p = \{a \in \mathbb{N} : a \text{ квадратичный вычет по модулю } p\}$.

Утверждение 2. Пусть $k = 2$ и $p > 3$. Если

$$\lambda \in \bigcup_{a \in M_p} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathcal{E}_p : |16x - 16 - 3ap^{2n}|_p < p^{-2n} \right\},$$

то система уравнений (3.1) имеет два решения на инвариантном множестве $\{z \in \mathcal{E}_p^2 : z_1 \neq z_2\}$.

Доказательство. Вычитая второе уравнение (3.1) из первого, получим

$$(z_1 - z_2) \left(1 - \lambda \frac{(2 + z_1 + z_2)}{(z_1 + z_2)^2} \right) = 0$$

Так как $z_1 \neq z_2$, то имеем

$$(z_1 + z_2)^2 - \lambda(z_1 + z_2) - 2\lambda = 0. \quad (3.2)$$

Решив квадратное уравнение (3.2), получим

$$z_1 + z_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda + 8)}}{2}. \quad (3.3)$$

Так как $\lambda \in \mathcal{E}_p$ и $p > 3$, то имеем следующие

$$\lambda = 1 + \lambda_1 p + \lambda_2 p^2 + \dots$$

и

$$\lambda + 8 = 9 + \lambda_1 p + \lambda_2 p^2 + \dots$$

В силу Теоремы 1 существуют числа $\sqrt{\lambda}$ и $\sqrt{\lambda + 8}$ в \mathbb{Q}_p . С другой стороны, z_1 и z_2 должны удовлетворять $|z_1 + z_2 - 2|_p < 1$. Заметив

$$\sqrt{\lambda(\lambda + 8)} = 3 + \lambda'_1 p + \lambda'_2 p^2 + \dots$$

получим для $z_1 + z_2 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda+8)}}{2}$,

$$|z_1 + z_2 - 2|_p = \left| \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda+8)} - 4 \right|_p = |(\lambda_1 + \lambda'_2)p + \dots|_p < 1$$

и для $z_1 + z_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda+8)}}{2}$

$$|z_1 + z_2 - 2|_p = \left| \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda+8)} - 4 \right|_p = |-6 + (\lambda'_1 - \lambda'_2)p + \dots|_p = 1.$$

Подставляя $z_1 + z_2 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda+8)}}{2}$ в (3.1), мы получим

$$z = \left(\frac{2(1+z)}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda+8}} \right)^2. \quad (3.4)$$

Следовательно, получим решения квадратного уравнения (4.2)

$$z^\pm = \frac{\left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda+8} \right) \left(2\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{2(\lambda-4 + \sqrt{\lambda(\lambda+8)})} \right)}{8}. \quad (3.5)$$

Мы должны проверить существование $\sqrt{2(\lambda-4 + \sqrt{\lambda(\lambda+8)})}$ в \mathbb{Q}_p и $z^\pm \in \mathcal{E}_p$.

В силу Теоремы 1 число $\sqrt{2(\lambda-4 + \sqrt{\lambda(\lambda+8)})}$ существует тогда и только тогда, когда существуют $n \in \mathbb{N}$, $a \in M$ и $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p$ такие, что

$$2(\lambda-4 + \sqrt{\lambda(\lambda+8)}) = p^{2n}(a + \varepsilon p)$$

Отсюда найдем

$$\lambda = 1 + \frac{3a}{16}p^{2n} + \varepsilon p^{2n+1}, \quad \text{где } |\varepsilon|_p \leq 1,$$

которая эквивалентно $|16\lambda - 16 - 3ap^{2n}|_p < p^{-2n}$. Теперь проверим $z^\pm \in \mathcal{E}_p$. Пусть $|16\lambda - 16 - 3ap^{2n}|_p < p^{-2n}$ для некоторого натурального числа n и $a \in M_p$. Тогда имеем

$$|z^\pm - 1|_p = \left| \left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda+8} \right) \left(2\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{2(\lambda-4 + \sqrt{\lambda(\lambda+8)})} \right) - 8 \right|_p =$$

$$|(4 + \alpha p)(2 + \beta p \pm \gamma p^n) - 8|_p < 1, \quad \text{где } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_p.$$

Это означает, что $z^\pm \in \mathcal{E}_p$. Таким образом, мы доказали, что функциональное уравнение (3.1) имеет две решения $z^{(1)} = (z^+, z^-)$ и $z^{(2)} = (z^-, z^+)$ на множестве $\{z \in \mathcal{E}_p^2 : z_1 \neq z_2\}$, если $|16\lambda - 16 + 3ap^{2n}|_p < p^{-2n}$. \square

Из Утверждений 1 и 2 получим следующее

Теорема 5. Пусть $k = 2$ и $p > 3$. Тогда верны следующие утверждения:

1) Если

$$\lambda \notin \bigcup_{a \in M_p} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathcal{E}_p : |16x - 16 - 3ap^{2n}|_p < p^{-2n} \right\},$$

то существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса для модели (1.2);

2) Если

$$\lambda \in \bigcup_{a \in M_p} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathcal{E}_p : |16x - 16 - 3ap^{2n}|_p < p^{-2n} \right\},$$

то существуют три трансляционно-инвариантные p -адические меры Гиббса для модели (1.2).

4. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ МЕРА ГИББСА

В этом пункте мы исследуем периодические p -адические меры Гиббса для модели (1.2) и используем групповую структуру дерева Кэли. Как известно (см. [6]), что существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k , являющейся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими a_1, a_2, \dots, a_{k+1} .

Определение 2. [5] Пусть \tilde{G} нормальная подгруппа группы G_k . Множество $z = \{z_x : x \in G_k\}$ называется \tilde{G} -периодическим, если $z_{yx} = z_x$ для любого $x \in G_k$ и $x \in \tilde{G}$. Соответствующая p -адическая мера Гиббса μ_z называется \tilde{G} -периодической.

Очевидно, что G_k -периодическая мера является трансляционно-инвариантной. Обозначим

$$G^{(2)} = \{x \in G_k : \text{длина слова } x \text{ четная}\}.$$

Это множество является нормальной подгруппой индекса два [6].

Следующая теорема характеризует множество всех периодических p -адических мер Гиббса для модели (1.2).

Теорема 6. Пусть \tilde{G} нормальная подгруппа конечного индекса в G_k . Тогда любая \tilde{G} -периодическая p -адическая мера Гиббса для модели (1.2) является либо трансляционно-инвариантной, либо $G^{(2)}$ -периодической.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F : \mathcal{E}_p^2 \rightarrow \mathcal{E}_p^2$, определенную как

$$F(z) = (F_1(z), F_2(z)), \quad \text{где } F_i(z) = \frac{1 + z_i}{z_1 + z_2}, \quad i = 1, 2.$$

Легко проверить, что $F_i(z) = F_i(t)$, $i = 1, 2$ в том и только в том случае, если $z = t$. Следовательно, имеем $F(z) = F(t)$ тогда и только тогда, когда $z = t$. Из этого свойства как в доказательстве Теоремы 2 в [13] следует, что любая

\tilde{G} -периодическая мера Гиббса является либо трансляционно-инвариантной либо $G^{(2)}$ -периодической. \square

Благодаря этой теоремы имеем, что для того, чтобы найти периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса для модели (1.2), достаточно исследовать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1 = \lambda \left(\frac{1+t_1}{t_1+t_2} \right)^k, \\ z_2 = \lambda \left(\frac{1+t_2}{t_1+t_2} \right)^k, \\ t_1 = \lambda \left(\frac{1+z_1}{z_1+z_2} \right)^k, \\ t_2 = \lambda \left(\frac{1+z_2}{z_1+z_2} \right)^k, \\ z_1 \neq t_1, \quad z_2 \neq t_2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Мы рассмотрим (4.1) при $k = 2$. Предположим, что $z_1 = z_2 = z$. Тогда из (4.1) получим

$$z = f(f(z)), \quad \text{где } f(z) = \lambda \left(\frac{1+z}{2z} \right)^2.$$

Заметим, что уравнение $f(f(z)) - z = 0$ содержит решение уравнения $f(z) - z = 0$. Но нас интересует только периодические (не являющиеся трансляционно-инвариантными) решения. Поэтому рассмотрим уравнение

$$\frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z} = 0,$$

которое эквивалентно

$$\lambda z^2 - 2(2 - \lambda)z + \lambda = 0. \quad (4.2)$$

Это уравнение имеет решения в \mathbb{Q}_p

$$z^\pm = \frac{2 - \lambda \pm 2\sqrt{1 - \lambda}}{\lambda},$$

если существует $\sqrt{1 - \lambda}$ в \mathbb{Q}_p .

Для того, чтобы решения z^\pm уравнения (4.2) были искомыми, надо проверить $z^\pm \in \mathcal{E}_p$ и $f(z^\pm) - z^* \neq 0$. Сначала мы исследуем при каких $\lambda \in \mathcal{E}_p$ число $\sqrt{1 - \lambda}$ существует в \mathbb{Q}_p . Затем, проверим $z^\pm \in \mathcal{E}_p$ и $f(z^\pm) - z^* \neq 0$.

Лемма 2. Пусть $\lambda \in \mathcal{E}_p$. Число $\sqrt{1 - \lambda}$ существует в \mathbb{Q}_p тогда и только тогда, когда

$$\lambda \in \bigcup_{a \in M_p} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathcal{E}_p : |x - 1 + ap^{2n}|_p < p^{-2n} \right\}, \quad \text{если } p > 2 \quad (4.3)$$

и

$$\lambda \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathcal{E}_2 : |x - 1 + 2^{2n}|_2 < 2^{-2n-2} \right\}, \quad \text{если } p = 2. \quad (4.4)$$

Доказательство. Пусть $p = 2$. Тогда из $\lambda \in \mathcal{E}_2$ получим

$$\lambda = 1 + \lambda_2 2^2 + \lambda_3 2^3 + \dots, \quad \text{где } \lambda_i \in \{0, 1\}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Отсюда, в силу Теоремы 1 имеем

$$1 - \lambda = 2^{2n} (1 + \lambda'_{2n+3} 2^3 + \lambda'_{2n+4} 2^4 + \dots), \quad n \in \mathbb{N},$$

которое эквивалентно $|\lambda - 1 + 2^{2n}|_2 < 2^{-2n-2}$.

Пусть $p > 2$. Тогда из $\lambda \in \mathcal{E}_p$ получим

$$\lambda = 1 + \lambda_1 p + \lambda_2 p^2 + \dots, \quad \text{где } \lambda_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда в силу Теоремы 1 имеем

$$1 - \lambda = p^{2n} (a + \lambda'_{2n+1} p + \lambda'_{2n+2} p^2 + \dots), \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \in M_p.$$

Следовательно, получим $|\lambda - 1 + ap^{2n}|_p < p^{-2n}$. \square

Теперь проверим $z^\pm \in \mathcal{E}_p$. Заметив $|\lambda|_p = 1$ и $|1 - \lambda|_p = p^{-2n}$ и используя свойство p -адической нормы, получим

$$|z^\pm - 1|_p = \frac{|2(1 - \lambda \pm \sqrt{1 - \lambda})|_p}{|\lambda|_p} = |2p^n|_p < p^{-1/(p-1)}.$$

Это означает, что $z^\pm \in \mathcal{E}_p$.

Покажем $f(z^\pm) - z^\pm \neq 0$.

$$f(z^\pm) - z^\pm = \lambda \left(\frac{1 + z^\pm}{2z^\pm} \right)^2 - z^\pm = \frac{-4\sqrt{1 - \lambda}(1 \pm \sqrt{1 - \lambda})^2}{\lambda^2}.$$

Так как $0 < |1 - \lambda|_p < 1$, то имеем $|f(z^\pm) - z^\pm|_p \neq 0$. Следовательно, $z = (z^+, z^-), t = (z^-, z^+)$ и $z = (z^-, z^+), t = (z^+, z^-)$ являются решениями (4.1) при $k = 2$.

Таким образом, мы доказали следующее

Утверждение 3. Пусть $k = 2$. Тогда (4.1) имеет по крайней мере два решения на \mathcal{E}_p^4 , если имеет место (4.3) и (4.4).

Из этого утверждения получим следующую теорему

Теорема 7. Пусть имеет место (4.3) при $p > 2$ (и (4.4) при $p = 2$). Тогда для модели (1.2) существуют по крайней мере две периодические p -адические меры Гиббса на дереве Кэли порядка два.

5. ОГРАНИЧЕННОСТЬ p -АДИЧЕСКИХ МЕР ГИББСА

В этом пункте мы будем исследовать ограниченности p -адических мер Гиббса для модели (1.2). Напомним, что p -адическая вероятностная мера может быть неограниченной.

Лемма 3. Пусть μ_z есть p -адическая мера Гиббса для модели (1.2). Тогда для нормирующей константы (2.2) имеет место следующая рекуррентная формула:

$$Z_{z,n+1} = A_{z,n} Z_{z,n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $A_{z,n}$ определяется по формуле (5.2).

Доказательство. Пусть функция $z' : x \rightarrow z'_x = (z'_{1,x}, z'_{2,x}) \in \mathcal{E}_p^2$ удовлетворяет функциональному уравнению (2.4). Тогда для любого $z_{0,x} \in \mathcal{E}_p$, $x \in V$ существует функция $a_z(x)$ такая, что

$$\begin{aligned} \prod_{y \in S(x)} (\lambda z_{1,y} + \lambda z_{2,y}) &= a_z(x) z_{0,x}, \\ \prod_{y \in S(x)} (z_{0,y} + \lambda z_{i,y}) &= a_z(x) z_{i,x}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $z_{i,x} = z_{0,x} z'_{i,x} / \lambda$, $i = 1, 2$. Тогда для любой конфигурации $\sigma \in \Omega_{V_n}$ имеет место следующие

$$\begin{aligned} \prod_{x \in W_n} \prod_{\substack{y \in S(x) \\ \sigma(x)=0}} (\lambda z_{1,y} + \lambda z_{2,y}) \prod_{\substack{y \in S(x) \\ \sigma(x)=1}} (z_{0,y} + \lambda z_{1,y}) \prod_{\substack{y \in S(x) \\ \sigma(x)=2}} (z_{0,y} + \lambda z_{2,y}) = \\ \prod_{x \in W_n} a_z(x) z_{\sigma(x),x} = A_{z,n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x),x}, \quad \text{где } A_{z,n} = \prod_{x \in W_n} a_z(x). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Учитывая (2.1) и (2.2) из (5.2) получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \sum_{\omega \in \Omega_{W_{n+1}}} \mu_z^{(n+1)}(\sigma \vee \omega) = \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \sum_{\omega \in \Omega_{W_{n+1}}} \frac{1}{Z_{z,n+1}} \lambda^{\#\sigma \vee \omega} \prod_{x \in W_{n+1}} z_{\omega(x),x} = \\ &= \frac{A_{z,n}}{Z_{z,n+1}} \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \lambda^{\#\sigma} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x),x} = \frac{A_{z,n}}{Z_{z,n+1}} Z_{z,n}. \end{aligned}$$

Отсюда, $Z_{z,n+1} = A_{z,n} Z_{z,n}$. □

Теорема 8. p -адическая мера Гиббса для модели (1.2) является ограниченной тогда и только тогда, когда $p \neq 2$.

Доказательство. Пусть $z' = (z'_{1,x}, z'_{2,x}) \in \mathcal{E}_p^2$ решение функционального уравнения (2.4) и μ_z p -адическая мера Гиббса соответствующей функции $z = (z_{0,x}, \frac{z_{0,x} z'_{1,x}}{\lambda}, \frac{z_{0,x} z'_{2,x}}{\lambda})$, где $z_{0,x} \in \mathcal{E}_p$. Тогда в силу Леммы 3 при всех $n \geq 1$ имеем

$$Z_{z,n} = \prod_{x \in V_{n-1}} a_z(x), \quad \text{где } a_z(x) = z_{0,x}^{k-1} (z'_{1,x} + z'_{2,x})^k.$$

Так как $z_{0,x}, z'_{1,x}, z'_{2,x} \in \mathcal{E}_p$, то имеем

$$|a_z(x)|_p = \begin{cases} 1, & \text{если } p \neq 2, \\ 2^{-k}, & \text{если } p = 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|Z_{z,n}|_p = \begin{cases} 1, & \text{если } p \neq 2, \\ 2^{-k|V_{n-1}|}, & \text{если } p = 2. \end{cases}$$

Отсюда для любой конфигурации $\sigma \in \Omega$ получим

$$|\mu_z^{(n)}(\sigma)|_p = \frac{|\lambda^{\# \sigma} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x),x}|_p}{|Z_{z,n}|_p} = \begin{cases} 1, & \text{если } p \neq 2, \\ 2^{k|V_{n-1}|}, & \text{если } p = 2. \end{cases}$$

Это означает, что мера μ_z является ограниченной тогда и только тогда, когда $p \neq 2$. \square

Следствие 1. *Для модели (1.2) не существует фазового перехода. В частности, не существует сильного фазового перехода.*

Следствие 2. *Пусть $k = 2$ и $p > 3$. Если*

$$\lambda \in \bigcup_{a \in M_p} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathcal{E}_p : |16x - 16 - 3ap^{2n}|_p < p^{-2n} \right\},$$

то для модели (1.2) существует квази фазовый переход.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Alberverio S., Karwowski W., *A random walk on p -adics, the generator and its spectrum*, Stochastic Processes Appl. **53** (1994), 1–22.
- [2] Alberverio S., Zhao X., *Measure-valued branching processes associated with random walks on p -adics*, Ann. Probab. **28** (2000), 1680–1710.
- [3] Yasuda K., *Extension of measures to infinite-dimensional spaces over p -adic field*, Osaka J. Math. **37**, (2000), 967–985.
- [4] Bleher P.M., Ruiz J., Zagrebnov V.A. *On the purity of the limiting Gibbs state for the Ising model on the Bethe lattice*, Journ. Statist. Phys. **79** (1995), 473–482.
- [5] Gandolfo D., Rozikov U.A., Ruiz J., *On p -adic Gibbs Measures for Hard Core Model on a Cayley Tree*. Markov Processes Relat. Fields, **18** (2012), 701–720
- [6] Ganikhodjaev N.N., Rozikov U.A., *Description of periodic extreme Gibbs measures of some lattice model on the Cayley tree*, Theor. Math. Phys. **111**, (1997), 480–486.
- [7] Ganikhodjaev N.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A., *Phase transitions of the Ising model on \mathbb{Z} in the p -adic number field*, Uzbek. Math. J. **4**, (1998), 23–29.
- [8] Georgii H.-O., *Gibbs Measures and Phase Transitions* (W. de Gruyter, Berlin, 1988).
- [9] Khakimov O.N., *p -Adic Gibbs measures for the model of Hard Spheres with three states on the Cayley tree*. Theor. Math. Phys., **177**(1), (2013), 1339–1351.
- [10] Khrennikov A. Yu., *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models* (Kluwer, Dordrecht, 1997).
- [11] Koblitz N., *p -Adic Numbers, p -adic Analysis, and Zeta-Functions* (Springer, Berlin, 1977).
- [12] Marinari E., Parisi G., *On the p -adic five point function*, Phys. Lett. B **203**, (1988) 52–54.

- [13] Martin J.B, Rozikov U.A., Suhov Yu.M. *A three state Hard-Core model on a Cayley tree*, Jour. Nonlinear Math. Phys. **12**(3) (2005), 432–448.
- [14] Mukhamedov F.M., *On p -adic quasi Gibbs measures for $q + 1$ -state Potts model on the Cayley tree*, p -adic Numb., Ultram. Anal. Appl., **2** (2010), 241–251.
- [15] van Rooij A. C. M., *Non-Archimedean Functional Analysis*, (M. Dekker, New York, 1978).
- [16] Rozikov U.A., Khakimov O.N., *p -Adic Gibbs Measures and Markov Random Fields on countable graphs*. Theor. Math. Phys. **175**:1 (2013), 518–525.
- [17] Rozikov U.A., Shoyusupov Sh.A., *Fertile HC models with three states on a Cayley tree*. Theor. Math. Phys. **156**:3 (2008), 1319–1330.
- [18] Schikhof W.H., *Ultrametric Calculus* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984).
- [19] Vladimirov V.S., Volovich I. V., Zelenov E. V., *p -Adic Analysis and Mathematical Physics* (World Sci., Singapore, 1994).

О. Н. ХАКИМОВ, ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, УЛ. ДУРМОН ЙУЛИ, 29, ТАШКЕНТ, 100125, УЗБЕКИСТАН.

E-mail address: hakimovo@mail.ru